Komplekse tall

Forelesningsnotat til Matematikk 10 ved HiG, høst 2004.

Hans Petter Hornæs *Versjon per 26.10.04.*

I Matematikk 10 er en kort innføring i komplekse tall pensum. Dette er dekket i Lorentzen, Hole og Lindstrøms Kalkulus med en og flere variabler*, kapittel A3 (s. 675—682), men her følger et alternativ som er litt mindre kortfattet.*

1 Komplekse tall på normalform

1.1 Det komplekse tallplan og komplekse tall på normalform

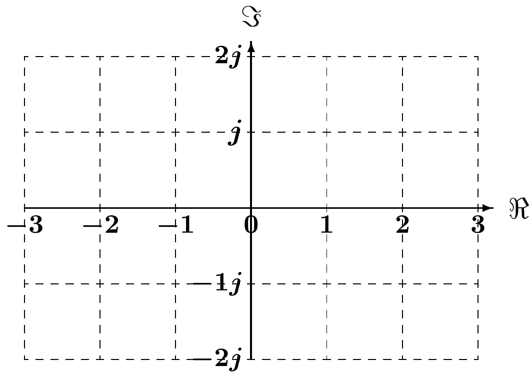
Vi skal nå konstruere et tallsystem som er en utvidelse av de reelle tall. De reelle tallene $\mathbb{R}$ fyller opp tallinjen med tall i en naturlig forstand (uttrykt bl.a. med skjæringssetningen). For en geometrisk tolkning må vi derfor ha en mengde som er større enn bare en uendelig lang linje. Det viser seg at det er mulig, og i mange sammenhenger praktisk, å lage et slikt tallsystem der tallene tilsvarer *punkter i planet*. Dette tallsystemet kalles *komplekse tall*, og betegnes med $\mathbb{C}$.

Vi starter med å tegne et vanlig rettvinklet aksekors. Den horisontale aksen (x–aksen) skal vi betrakte som den reelle tallinjen, og punkter på denne som reelle tall, som dermed er en delmengde av de komplekse tall. Den horisontale aksen kalles i denne sammenheng *den reelle aksen*, og betegnes ofte med $\Re$.

Den vertikale aksen skal kalles *den imaginære aksen*, og betegnes med $\Im$.

Det tallet som har koordinater $(0, 1)$, altså som ligger en enhet oppover den vertikale aksen, kalles *den imaginære enheten*, og betegnes med j.

Den imaginære enheten ble opprinnelig kalt i, og dette brukes fortsatt i de fleste bøker, blant annet i læreboka. På grunn av navnekollisjon med symbol for strømstyrke, og det at komplekse tall brukes mye i elektronikk, har elektroingeniører erstattet dette med bokstaven j, og vi følger denne notasjonen her. I Maple brukes forøvrig I som navn på dette tallet.



Tall på formen bj, med $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, kalles *imaginære tall*, og tilsvarer punktene med koordinater $(0, b)$ langs den imaginære aksen.

Addisjon mellom komplekse tall tilsvarer addisjon med vektorer i planet. Det vil si komponentvis addisjon (som geometrisk tilsvarer parallellogramloven). Dessuten kan vi multiplisere inn reelle tall på samme måte som vi multipliserer inn skalarer i vektorer, i hver komponent. Dermed kan vi skrive tallet som tilsvarer punktet med koordinater (a, b) på formen

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bj$$

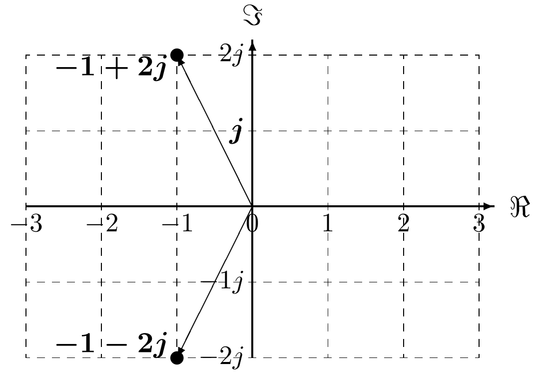
der vi har identifisert $(1, 0)$ med det reelle tallet 1, og skriver $a \cdot 1 = a$, og satt inn j for $(0, 1)$. Dette kalles *normalform* for komplekse tall.

For det komplekse tallet $z = a + bj$ kalles det reelle tallet a *realdelen*, og vi skriver $\mathrm{Re}(z) = a$.

Det reelle tallet b kalles *imaginærdelen*, og vi skriver $\mathrm{Im}(z) = b$.

Bokstaven z brukes ofte som navn på komplekse tall. For eksempel vil tallet som tilsvarer punktet med koordinater $(-1, 2)$ på normalform skrives $z = -1 + 2 \cdot j$. Vi har da $\mathrm{Re}(z) = -1$ og $\mathrm{Im}(z) = 2$. Merk at j ikke regnes med som en del av imaginærdelen.

I neste figur er $z = -1 + 2j$ og $-1 - 2j$ tegnet inn, både som punkter og vektorer:



Dette planet kalles *det komplekse tallplan**.

Vi oppsummerer så langt:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Komplekse tall } z \in \mathbb{C} \text{ på normalform:} & z = a + bj \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}) & \\
\text{Realdel:} \quad \mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}, & \text{Imaginærdel:} \quad \mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R} & \\
\text{Addisjon:} & (a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j & \\
\text{Subtraksjon:} & (a + bj) - (c + dj) = (a - c) + (b - d)j &
\end{array} \tag{1}
$$

Det vi har gjort så langt er ikke annet enn å innføre noen nye begreper (nye navn) på vektorregning i planet $\mathbb{R}^2$. Det som er den vesentlige utvidelsen er at vi også skal innføre multiplikasjon, og etterhvert divisjon, mellom komplekse tall. Det viser seg at det er nok å innføre en enkelt multiplikasjon for å få definert multiplikasjon mellom alle komplekse tall:

$$j \cdot j = -1 \tag{2}$$

Dette skrives også $j^2 = -1$. For alle *reelle tall* x er $x^2 \geq 0$, slik at vi ser fra dette at j ikke er et reelt tall. Vi sier ofte at $j = \sqrt{-1}$ (selv om dette kanskje er litt upresist, da også $(-j)^2 = -1$).

Det er ikke slik at vi uten videre kan innføre en regel som denne. Regelen er motivert ut fra bruk av komplekse tall før det komplekse tallplan ble innført. Da innførte man (litt uformelt) et tall $i = \sqrt{-1}$.

Det er en viktig begrunnelse at dette fører til et system uten selvmotsigelser, og at alle "vanlige regneregler" for de fire regningsartene blir bevart. Disse er listet opp i avsnitt 1.5. Bevisene for disse er stort sett forholdsvis enkle, men litt omfattende, så vi vil ikke gjennomføre dette her.

*Det kalles også Gaussplanet, etter matematikeren Carl Friedrich Gauss (1777–1855), men det var faktisk nordmannen Caspar Wessel, bror av forfatteren Johan Herman Wessel, som først innførte det i 1799. De komplekse tall uten denne tolkningen hadde man allerede brukt lenge, blant annet av *De Moivre* (1667–1754).

Eksempel La oss si vi ønsker å løse 2. gradslikningen

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

Innsetting i den kjente løsningsformlen for løsning av 2. gradslikninger gir da:

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} .$$

Siden vi får et negativt tall under rottegnet sier vi at vi ikke har noen *reelle løsninger*, og gir oss ofte med det. I en del sammenhenger er det imidlertid nødvendig å bruke disse røttene likevel, og vi prøver å regne videre:

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-2 \pm 4 \cdot \sqrt{-1}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{-1}$$

Siden vi nå har innført et tall $j = \sqrt{-1}$ kan vi uttrykke disse to røttene som

$$z_1 = -1 + 2j \text{ og } z_2 = -1 - 2j \ .$$

Altså er røttene de to *komplekse tallene* vi tegnet i forrige figur! Selv om dette er meningsløse tall i noen sammenhenger, er de både nyttige og viktige i andre sammenhenger[†].

1.2 Multiplikasjon av komplekse tall på normalform

Vi skal nå se hva multiplikasjonen $j^2 = -1$, sammen med vanlige regneregler for multiplikasjon (kjent fra å regne sammen polynomer) medføre for multiplikasjon mellom to komplekse tall $z_1 = a + bj$ og $z_2 = c + dj$.

Først multipliserer vi hvert ledd i første parentes med hvert i andre. Deretter bytter vi litt om på rekkefølgen av leddene og faktorene, og får i første omgang:

$$z_1 z_2 = (a + bj)(c + dj) = ac + adj + bjc + bjdj = ac + bdj^2 + adj + bcj$$

Vi kan så erstatte j^2 med -1, og dessuten sette j utenfor som felles faktor i de to siste leddene:

$$z_1 z_2 = ac + bd(-1) + (ad + bc)j = (ac - bd) + (ad + bc)j$$

Merk at $ac - bd$ bare består av reelle tall, slik at dette er et reelt tall. Likeledes er $ad + bc$ et reelt tall. Dermed er siste uttrykk på *normalform*, og vi har multiplisert to vilkårlige komplekse tall på normalform, og endt opp med et komplekst tall på normalform. Vi oppsummerer:

Multiplikasjon av komplekse tall på normalform:

$$(a + bj)(c + dj) = (ac - bd) + (ad + bc)j \tag{3}$$

Det kan være hensiktsmessig å huske denne formelen. Selv synes jeg den er lettest å huske "verbalt" som: "Realdelen av produktet er realdel ganger realdel minus imaginærdel ganger imaginæredel. Imaginærdelen av produktet er realdel ganger imaginærdel pluss imaginærdel ganger realdel". Alternativt kan man gjennomføre utregningen som over (med tall istedenfor bokstaver), eller slå opp regelen i formelsamlinga (avsnitt 1.5, s. 2–3).

[†] For eksempel hører løsningen av denne likningen sammen med løsningen av differensialikningen $y'' + 2y' + 5y = 0$. Selv om ikke røttene er reelle er løsningsfunksjonene vanlige reelle funksjoner som finnes via de komplekse røttene. De er forøvrig alle funksjoner på formen $y = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x)$, der $-x = -1 \cdot x$ i eksponenten skyldes ar realdelen er -1, mens 2 foran x inne i cosinus og sinusleddet er imaginærdelen.

Talleksempel: La $z_1 = 2 + 3j$ så $a = 2$, $b = 3$ og $z_2 = 4 - j$ så $c = 4$ og $d = -1$:

$$(2 + 3j)(4 - j) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1)) + (2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4)j = 11 + 10j$$

1.3 Komplekskonjugert

En operasjon vi ofte støter på med komplekse tall er å bevare realdelen, men å skifte fortegn på imaginærdelen.

Dette kalles kompleks konjugering, og betegnes med $\overline{z}$:

$$\textit{Definisjon av kompleks konjugert:} \qquad \overline{a + bj} = a - bj \tag{4}$$

Vi ser lett at $z_2 = \overline{z_1}$ er $\overline{z_2} = z_1$ (da vi bytter fortegn fram og tilbake).

Vi så for eksempel at de to komplekse røttene i likningen $x^2 - 2x + 5 = 0$ var $-1 + 2j$ og $-1 - 2j$. Dette er et par av kompleks konjugerte tall. Det gjelder generelt at komplekse røtter i reelle polynomlikninger opptrer i komplekskonjugerte par.

En viktig bruk av komplekskonjugering er å ta produktet av et tall med sin komplekskonjugerte. Vi kan bruke regneregelen for produkt (med $c = a$ og $d = -b$), men et alternativ er å bruke 3. kvadratsetning som også gjelder komplekase tall:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bj) \cdot (\overline{a + bj}) = a^2 - (bj)^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2 \tag{5}$$

Legg merke til at produktet $a^2 + b^2$ er et *positivt reelt tall*. Unntaket er hvis $z = 0 = 0 + 0j$. Da er $a^2 + b^2 = 0^2 + 0^2 = 0$.

Denne egenskapen utnyttes blant annet i kompleks divisjon.

1.4 Divisjon av komplekse tall på normalform

Når det gjelder kompleks divisjon anbefaler jeg at dere lærer metoden, framfor å huske formelen.

Den baserer seg på knepet å multiplisere teller og nevner med den komplekskonjugerte av nevneren. Med dette oppnår vi at nevneren blir et reelt tall.

Metoden vises med et eksempel:

$$\frac{2 + 5j}{4 - 3j} = \frac{(2 + 5j)(4 + 3j)}{(4 - 3j)(4 + 3j)} = \frac{(2 \cdot 4 - 5 \cdot 3) + (2 \cdot 3 + 5 \cdot 4)}{4^2 + 3^2} = \frac{-7 + 26j}{25}$$

I nevneren brukte vi multiplikasjonsregelen for tall med sin komplekskonjugerte fra forrige avsnitt. Vitsen er at dette blir et reelt tall (her 25). Merk også at det alltid blir + mellom de to kvadratene. Nå kan vi dividere realdel og imaginærdel hver for seg med nevneren, og får

$$\frac{2 + 5j}{4 - 3j} = \frac{-7}{25} + \frac{26}{25}\,j$$

Merk at nå er kvotienten på normalform, siden $-7/25$ og $26/25$ er reelle tall.

I tilegg til å være en metode for faktisk å utføre divisjonen generaliseres dette lett[‡] slik at vi kan se at z_1/z_2 alltid blir et komplekst tall når $z_2 \neq 0$. Det vil si at divisjon er definert generelt for komplekse tall.

[‡]Vi kan generalisere det til formelen

$$\frac{a + bj}{c + dj} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j$$

Eksempel, lineær likning. Vi skal som eksempel se på løsningen av følgende 1. gradslikning med komplekse koeffisienter:

$$2z + 1 = jz - 4j$$

Vi ordner den først slik at leddene med z blir stående på venstre side og resten på høyre side av likhetstegnet:

$$2z - jz = -4j - 1 \iff (2 - j)z = -1 - 4j$$

Denne er på samme form som en reell lineær likning $ax = b$, bortsett fra at a og b er komplekse. Den løses på tilsvarende måte, dvs. tilsvarende $x = b/a$:

$$z = \frac{-1 - 4j}{2 - j} = \frac{(-1 - 4j)(2 + j)}{(2 - j)(2 + j)} = \frac{((-1)2 - (-4)1) + ((-1)1 + (-4)2)j}{2^2 + 1^2} = \frac{2 - 9j}{5} = \frac{2}{5} - \frac{9}{5}j$$

1.5 Regneregler for komplekse tall

Her listes opp noen grunnleggende regneregler for komplekse tall. Dette oppsummerer hva jeg legger i begrepet "vanlige regneregler for de fire regningsartene".

Det er temmelig rett fram å vise at de gjelder, men det blir jo litt mye regning med så mange regler. Dette taes derfor ikke med her.

1. For alle $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ er $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ og $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$
   Vi sier at mengden av komplekse tall er *lukket* under addisjon og multiplikasjon.

2. Vi har et tall $0 \in \mathbb{C}$ med egenskapen $z + 0 = z$ for alle $z \in \mathbb{C}$.
   Vi har et tall $1 \in \mathbb{C}$, $1 \neq 0$, med egenskapen $z \cdot 1 = z$ for alle $z \in \mathbb{C}$.
   Dette er selvfølgelig de vanlige tallen 0 og 1, og de kalles additiv og multiplikativ enhet.

3. For alle $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ er $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ og $z_1 z_2 = z_2 z_1$
   Dette kalles *kommutativitet* av henholdsvis addisjon og multiplikasjon.

4. For alle $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_3 \in \mathbb{C}$ er $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ og $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
   Dette kalles *assosiativitet*, og betyr at vi uten fare for misforståelse kan droppe parentesene i gjentatte addisjoner eller multiplikasjoner.

5. For alle $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_3 \in \mathbb{C}$ er $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.
   Dette kalles *distributivitet*, og medfører regelen om at parenteser multipliseres sammen ved å multiplisere hvert ledd i første parentes med hvert ledd i andre parentes.

6. For alle $z \in \mathbb{C}$ finnes et tall $-z \in \mathbb{C}$ med egenskapen $z + (-z) = 0$.
   Dette betyr at vi også har subtraksjon, da vi kan definere $z_1 - z_2$ som $z_1 + (-z_2)$.

7. For alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, finnes et tall $z^{-1} \in \mathbb{C}$ med egenskapen $z \cdot z^{-1} = 1$.
   Dette betyr at vi også har divisjon, da vi kan definere z_1/z_2 som $z_1 \cdot z_2^{-1}$.

Fra disse reglene følger andre vanlige regneregler som for eksempel kvadratsetningene, potensregningsreglene for heltallspotenser og brøkregningsreglene.

Noen kommentarer litt utenfor pensum:

Hvis vi hele vegen bytter ut $\mathbb{C}$ med $\mathbb{Q}$ (de rasjonale tallene) eller $\mathbb{R}$ (de reelle tallene) gjelder de samme reglene. Et tallsystem som oppfyler disse *aksiomene* kalles en *kropp*.

Man kunne tenke seg en videre utvidelse, at vi definerte en multiplikasjon av vektorene i $\mathbb{R}^3$ så det ble en kropp. Det viser seg imidlertid at dette er umulig, og det er heller ikke mulig for $\mathbb{R}^n$ for noen andre endelige tall n. Dette betyr at vi i en viss forstand er framme ved det endelige målet med *kroppsutvidelser* når vi har konstruert $\mathbb{C}$.

Man synes kanskje en komponentvis multiplikasjon hadde vært enklere enn den multiplikasjonen vi har definert for $\mathbb{C}$. Da ville vi ikke fått noen *kropp*. I så fall måtte tallet 1 fra aksiom 2 betydd punktet $(1,1)$, men aksiom 7 ville ikke vært oppfyllt. Hvis vi for eksempel hadde valgt $z = (0,1)$, ville $z \cdot z_1 = (0,1) \cdot (x,y) = (0,y)$, som ikke er lik $(1,1)$ for noen valg av x og y.

Det er ikke tilfeldig at vi ikke har med noen setninger som involverer ulikheter. I motsetning til $\mathbb{R}$ og $\mathbb{Q}$ er ikke $\mathbb{C}$ lineært ordnet (ihvertfall ikke på noen naturlig måte som gjør at regler som f.eks $a < b$ og $c < d \;\Rightarrow a + c < b + d$ gjelder).

1.6 Algebraens fundamentalsetning.

La $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_x + a_0$ være et polynom der koeffisientene $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$. Følgende setning (det noe kompliserte beviset tar vi ikke med) gjelder da:

$$\textit{Algebraens fundamentalsetning:} \qquad \text{Det finnes et komplekst tall } c \text{ slik at } P(c) = 0 \tag{6}$$

En konsekvens av dette er at ethvert komplekst polynom kan faktoriseres i komplekse lineære faktorer:

$$P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

Hvis koeffisientene $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ kommer de komplekse røttene i kompleks konjugerte par, og faktoren $(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 + (-c - \overline{c})x + c\,\overline{c}$ er et irredusibelt 2. gradspolynom med *reelle koeffisienter*. Det betyr at ethvert reelt polynom kan faktoriseres i et produkt av reelle førstegrads- og irredusible andregradspolynomer.

2 Komplekse tall på polarform

2.1 Absoluttverdi (modul) og argument (polarvinkel)

Vi har i forbindelse med amplitude og faseforskyvning av sinuskurver sett at et punkt i planet kan angis enten som rektangulære koordinater ((x,y)–koordinater), eller som *polarkoordinater*. Polarkoordinater er paret bestående av R, avstanden fra origo, og θ, vinkelen linja (vektoren) fra origo til punktet danner med den positive x–aksen.

Dette gjelder også for komplekse tall, men vi bruker litt andre betegnelser og navn på størrelsene.

$$\textit{Definisjon av absoluttverdi} \qquad |z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \tag{7}$$

Absoluttverdien kalles også *modulen* til z.

Absoluttverdien svarer geometrisk til lengden av linja fra 0 (origo) til punktet som representerer z i det komplekse tallplan, eller normen til vektoren $[\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)]$.

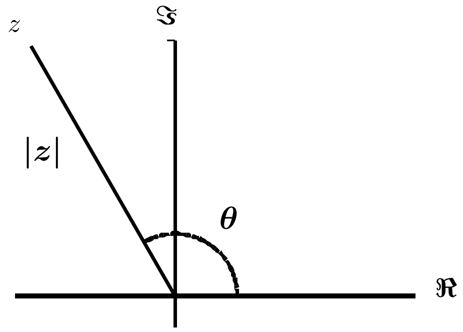
Hvis $x \in \mathbb{R}$ er også $x \in \mathbb{C}$, siden $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Da svarer absoluttverdi til hvordan absoluttverdi (eller tallverdi) er definert for reelle tall. Vi har for eksempel

$$|-3| = |-3 + 0j| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3 \ .$$

Vi definerer *argumentet* til z som vinkelen linjestykket ut til punktet z danner med den positive reelle aksen i det komplekse tallplan. Vi bruker ofte den greske bokstaven θ (eller ϕ) for argumentet.

Argumentet gies alltid i *radianer*.

Følgende skisse viser absoluttverdien $|z|$ og argumentet θ for et komplekst tall:



Hvis absoluttverdien og argumentet er gitt får vi et entydig komplekst tall, men det er en viss flertydighet i hvordan vi oppgir argument, da vi kommer ut i samme retning og dermed til samme punkt i det komplekse planet om vi adderer eller subtraherer et helt antall ganger 2π til argumentet θ.

Ved å gi $z \in \mathbb{C}$ ved å oppgi absoluttverdi og argument sier vi z er gitt på *polarform* (i motsetning til normalform).

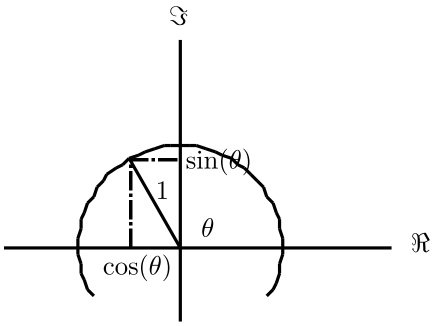
En skrivemåte for dette er polar $(|z|, \theta|)$, for eksempel polar $\left(2, \frac{2}{3}\pi\right)$ eller polar $(11.62, 1.982)$.

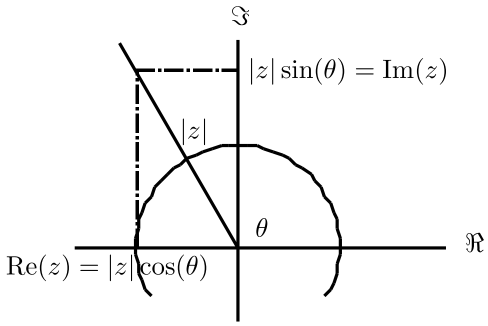
Noen bruker også skrivemåten $(|z|\angle\theta)$, for eksempel $(2\angle\frac{2}{3}\pi)$.

2.2 Omregning mellom normal- og polarform

Hvis $|z| = 1$ blir projeksjonen ned på den reelle aksen $\cos(\theta)$, det var jo slik vi definerte cosinus geometrisk. Da blir også, fra geometrisk definisjon av sinus, projeksjonen til den imaginære aksen $\sin(\theta)$. Dette er illustrert i figuren til venstre.

Hvis $|z|$ er et vilkårlig tall vil vektoren, og dermed også projeksjonen på aksene, forlenges med en faktor $|z|$ (figuren til høyre):





Siden førstekoordinaten er realdelen, og andrekoordinaten er imaginærdelen til z får vi dermed

Sammenheng mellom paret (realdel , imaginærdel) og paret (absoluttverdi, argument)

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= |z|\cos(\theta) \\ \mathrm{Im}(z) &= |z|\sin(\theta) \\ \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 &= |z|^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Den nederste likningen er Pytagoras eller, om vi vil, definisjonen av $|z|$. Den følger også av de to over, men den er ofte nyttig å ha med som hjelpesetning ved siden av disse.

Dette gir direkte hvordan vi regner om fra polar- til normalform.

Eksempel Et komplekst tall er gitt på polarform som $z = \text{polar}\left(2, \frac{2}{3}\pi\right)$. Finn z på normalform.

Vi har da at

$$\mathrm{Re}(z) = 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \text{ og } \mathrm{Im}(z) = 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

Siden $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)j$ er da $\underline{\underline{z = -1+\sqrt{3}j}}$.

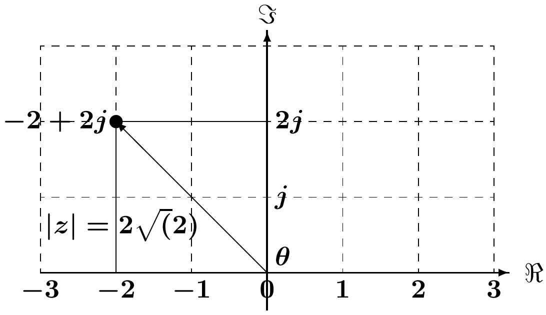
Den omvendte vegen er litt mer komplisert. La oss de på hvordan vi regner om $z = -2-2j$ tilpolarform.

Det er forholdsvis enkelt å finne absoluttverdien:

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

For å finne argumentet er det nyttig å lage en figur. Jeg anbefaler at dere *alltid* gjør det, ihvertfall i faget Matematikk 10 der kalkulator ikke tillates til eksamen.

Det er lett å tegne inn tallet $z = -2+2j$, bare tegn punktet med koordinater $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) = (-2, 2)$, og linjestykket (vektoren) fra 0 (origo) til dette punktet:



Et blikk på figuren skulle være nok til å se at $\theta = 3\pi/4$ (altså $\pi/2+\pi/4$, som tilsvarer $90° + 45°$).

Mer formelt kan vi si at linjestykkene med hjørner i punktene $(-2,0)$,$(-2,2)$, $(2,0)$ og $(0,0)$ er et kvadrat, og at vektoren ut til z halverer dette kvadratet. Derfor er vinkelen den danner med f.eks. den negative reelle aksen $\pi/4$, og derfor vinkelen med den positive reelle aksen $\pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

Hvis vi skulle regnet ut θ uten figur kunne vi brukt at $\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\theta)$ som gir $-2 = 2\sqrt{2}\cos(\theta)$, og tilsvarende $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$ som gir $2 = 2\sqrt{2}\sin(\theta)$. En måte å løse disse likningene på er å ta

$$\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \frac{|z|\sin\theta}{|z|\cos(\theta)} = \frac{\sin\theta}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) \qquad \text{som for } z = -2+2j \text{ gir} \quad \tan(\theta) = \frac{2}{-2} = -1\ .$$

Det må vises litt forsiktighet ved denne framgangsmåten. For det første virker den ikke om $\mathrm{Re}(z) = 0$, men i denne situasjonen ligger tallet på den imaginære aksen, og en figur vil raskt avgøre om $\theta = \pi/2$ eller $\theta = -\pi/2$.

Ellers er det naturlig å ta arcustangens, men dette fører ikke direkte til målet hvis θ ikke er i verdimengden til arctan som er intervallet $(-\pi/2\,, \pi/2)$.

I dette tilfellet får vi $\arctan(-1) = -\pi/4$, men dette er stikk motsatt retning av det vi vil. Dette skyldes at θ ikke er i verdimengden til arctan. Medisinen er da å snu retningen ved å addere π, slik at vi får $\theta = -\pi/4+\pi = 3\pi/4$. Dette må gjøres hver gang $\mathrm{Re}(z) < 0$.

Konklusjonen er at

$$z = -2+2j = \text{polar}\left(2\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$$

Et eksempel til, numeriske verdier. La nå $z = 19.23 - 7.11j$. En røff figur vil vise at θ er mellom $-\pi/2$ og 0, altså innenfor definisjonsområdet til arctan. Dermed skal vi *ikke* korrigere med π som i forrige eksempel. (Kunne også sagt at vi *ikke* skal korrigere med π da $\mathrm{Re}(z) = 19.23 > 0$.)

Vi bruker kalkultor eller Maple til utregningene,og finner:

$$|z| = |19.23 - 7.11j| = \sqrt{19.23^2 + (-7.11)^2} = \sqrt{19.23^2 + 7.11^2} = 20.50$$

Videre er

$$\theta = \arctan\left(\frac{-7.11}{19.23}\right) = -0.3541$$

Kalkulatoren må være innstilt i radianer (hvis ikke må det korrigeres ved å multiplisere med omregningsfaktoren $\pi/180$).

Dermed er

$$z = 19.23 - 7.11j = \text{polar}\,(20.50, -0.3541)$$

2.3 Trigonometrisk form

Siden et komplekst tall z på normalform er $\text{Re}(z) + \text{Im}(z)j$, og $\text{Re}(z) = |z|\cos(\theta)$ og $\text{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$, kan det også skrives

$$z = |z|\cos(\theta) + |z|\sin(\theta)j = r\,(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$$

der $r = |z|$ er absoluttverdien og θ er argumentet. Hvis vi skriver tallet på denne formen kalles det *trigonometrisk form*. På denne formen inngår r og θ, det regnes ikke sammen (da kommer vi tilbake til normalform).

Tallene fra eksemplene i forrige avsnitt blir på trigonometrisk form:

$$\begin{aligned} -2+2j &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + j\,\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) \\ 19.23 - 7.11j &= 20.50\,(\cos(0.3541) + j\,\sin(0.3541))\ . \end{aligned}$$

Det er de samme tallene som i polarformen vi uttrykker z med, så det er egentlig bare et litt annet oppsett på polarformen.

Vi skal nå regne ut produktet av to komplekse tall på trigonometrisk form. La $z_1 = r_1\,(\cos(\theta_1) + j\sin(\theta_1))$ og $z_2 = r_2\,(\cos(\theta_2) + j\sin(\theta_2))$.

Vi ommøblerer først litt på rekkefølgen av faktorene (ved å sette absoluttverdiene foran alt, og dessuten j–ene etter sinusene):

$$z_1\,z_2 = r_1r_2\ (\cos(\theta_1) + j\sin(\theta_1))\,(\cos(\theta_2) + j\sin(\theta_2)) = r_1r_2\ (\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)\,j)\,(\cos(\theta_2) +\ \sin(\theta_2)j)$$

Parentesene kan nå multipliseres med multiplikasjonregelen for komplekse tall på normalform (med $a = \cos(\theta_1)$, $b = \sin(\theta_1)$, $c = \cos(\theta_2)$ og $d = \sin(\theta_1)$), og vi får:

$$z_1\,z_2 = r_1r_2\ \left((\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))\ j\right)$$

Dette ser kanskje komplisert ut ved første blikk, men ved å bruke summeformlene for cosinus og sinus, $\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$ og $\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$ "baklengs", med $u = \theta_1$ og $v = \theta_2$, forenkles dette til:

$$z_1\,z_2 = r_1r_2\ (\cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2)) \tag{9}$$

Legg merke til at dette er et uttrykk på trigonometrisk form, med $r = r_1r_2$, og argument $\theta_1+\theta_2$. Det vil si: Vi *multipliserer absoluttverdiene, og får absoluttverdien i produktet.* Vi *adderer argumentene og får argumentet i produktet.*

Ved å skrive dette tilbake på polarform får vi

$$\text{polar}\,(r_1, \theta_1)\ \cdot\ \text{polar}\,(r_2, \theta_2) = \text{polar}\,(r_1 \cdot r_2\ ,\ \theta_1 + \theta_2) \tag{10}$$

Vi får en tilsvarende divisjonsregel:

$$\begin{aligned} \frac{r_1\,(\cos(\theta_1) + j\sin(\theta_1))}{r_2\,(\cos(\theta_2) + j\sin(\theta_2))} &= \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\theta_1-\theta_2) + j\sin(\theta_1-\theta_2)) \\ \frac{\text{polar}\,(r_1,\theta_1)}{\text{polar}\,(r_2,\theta_2)} &= \text{polar}\left(\frac{r_1}{r_2}\ ,\ \theta_1-\theta_2\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Dette vises enklest fra produktregelen, som en likning, med x som absoluttverdi og y som argument i kvotienten:

$$\frac{\text{polar}\,(r_1,\theta_1)}{\text{polar}\,(r_2,\theta_2)} = \text{polar}\,(x\,,\;y) \iff \text{polar}\,(x\,,\;y)\,\text{polar}\,(r_2,\theta_2) = \text{polar}\,(r_1,\theta_1) \iff$$

$$\text{polar}\,(x\cdot r_2\,,\;y+\theta_2) = \text{polar}\,(r_1,\theta_1) \quad \text{som gir likningene} \quad x\cdot r_2 = r_1 \text{ og } y+\theta_2 = \theta_1\ .$$

Eksempel La $z_1 = \text{polar}\,(4,\pi/3)$ og $z_2 = \text{polar}\,(2,\pi/6)$. Da er

$$z_1 z_2 = \text{polar}\left(4\cdot 2, \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \text{polar}\left(8,\frac{\pi}{2}\right) = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 8(0+j\cdot 1) = 8j$$

og

$$\frac{z_1}{z_2} = \text{polar}\left(\frac{4}{2},\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \text{polar}\left(2,\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\cdot\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}+j\ .$$

Vi kan sammenlikne med multiplikasjon på normalform:

$$z_1 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2+2\sqrt{3}\,j \qquad \text{og}$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}+j$$

Dette gir

$$z_1 z_2 = (2\cdot\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\cdot 1) + (2\cdot 1 + 2\sqrt{3}\sqrt{3})j = 0 + (2+2\cdot 3)j = 8j$$

Forsøk selv å sjekke divisjonen på normalform.

2.4 De Moivres formel

Hvis $|z| = 1$ er $z = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$. Vi får da

$$z^2 = z\cdot z = (\cos(\theta)+j\sin(\theta))\,(\cos(\theta)+j\sin(\theta))\cos(\theta+\theta)+j\sin(\theta+\theta) = \cos(2\theta)+j\sin(2\theta)$$

Denne typen multiplikasjon kan gjentas, og vi får for generelt heltall $n\in\mathbb{Z}$:

De Moivres formel

$$(\cos(\theta)+j\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+j\sin(n\theta) \tag{12}$$

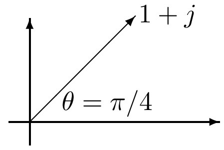
Formelen kan formelt vises ved et induksjonsbevis, og gjelder også for $n = 0$ og negative heltall.
Hvis vi ikke begrenser oss til $|z| = 1$ får vi varianten

$$z^n = (|z|\,(\cos(\theta)+j\sin(\theta)))^n = |z|^n\cos(n\theta)+j\sin(n\theta) \tag{13}$$

som på polarform kan skrives

$$\text{polar}\,(r,\theta)^n = \text{polar}\,(r^n, n\theta)$$

Eksempel La $z = 1+j$, og vi skal regne ut z^{20}.
Vi har $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = 2^{1/2}$, og vi ser av en enkel figur at $\theta = \pi/4$:



Dermed er z^n på polarform

$$\text{polar}\left(2^{1/2}, \pi/4\right)^{20} = \text{polar}\left(\left(2^{1/2}\right)^{20}, 20\pi/4\right) = \text{polar}\left(2^{10}, 5\pi\right)$$

Vi har at $2^{10} = 1024$. Siden cosinus og sinus har periode 2π kan vi addere eller subtrahere et helt antall ganger 2π og få en vektor i samme retning, dvs. få det samme tallet. Vi har da at 5π tilsvarer $5\pi - 2 \cdot 2\pi = \pi$. På trigonometrisk form, og etter litt regning på normalform, får vi da

$$(1+j)^{20} = 1024\left(\cos(\pi) + j\sin(\pi)\right) = 1024(-1+0j) = -1024 + 0j = -1024\ .$$

Eksempel Vi skal nå finne alle komplekse tall z slik at $z^3 - 8 = 0$, som kan omformes til $z^3 = -8$. Det vil si finne alle komplekse 3. røtter til -8. Vi ser lett at -2 er en rot, men hvilke andre finnes?

Vi løser dette ved å la z være ukjent, og uttrykke z på polarform med ukjent r og θ.

Vi har $|-8| = 8$, og siden vektoren ligger langs den negative reelle aksen har -8 argument $\theta = \pi$. Vi kan imidlertid bruke $\theta = 3\pi$ eller $\theta = 5\pi$, og generelt $\theta = \pi + k \cdot 2\pi$ der k er et heltall. Dette har betydning i denne problemstillingen.

Vi regner ut den ukjente z^3 (på polar- eller trigonometrisk form), og sammenlikner med -8 på den tilsvarende formen:

$$z^3 = \text{polar}\left(r, \theta\right)^3 = \text{polar}\left(r^3, 3\theta\right) = \text{polar}\left(8, \pi + 2k\pi\right)$$

Ved å sammenlikne absoluttverdiene ser vi at $r^3 = 8$, og siden r er et positivt reelt tall må vi ha $r = 2$.

Deretter sammenlikner vi argumentene, og har at $3\theta = \pi + 2k\pi \iff \theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$.

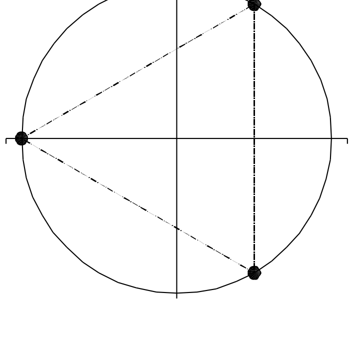
For $k = 0$ får vi da $\theta = \frac{\pi}{3}$, for $k = 1$ får vi $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ og for $k = 2$ får vi $\theta = \frac{\pi}{3} + 2\frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$.

Hvis vi fortsetter med $k = 3$ får vi $\theta = \frac{\pi}{3} + 3\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$. Siden dette er argumentet vi fikk for $k = 0$ med en ekstra runde, gir dette det samme tallet opp igjen. Tilsvarende får vi bare de 3 komplekse tallene vi fik ved å velge $k = 0$, $k = 1$ og $k = 2$ opp igjen for andre k–verdier, så vi blir stående igjen ped 3 røtter. Setter det opp på trigonometrisk for og regner det om til normalform:

$$\begin{array}{lcccccc}
k=0: & 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) & = & 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2}\right) & = & \sqrt{3} + j \\
k=1: & 2\left(\cos\left(\pi\right) + j\,\sin\left(\pi\right)\right) & = & 2\left(-1 + j\,0\right) & = & -2 \\
k=2: & 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + j\,\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right) & = & 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{-1}{2}\right) & = & \sqrt{3} - j
\end{array}$$

Kommentarer til eksemplet: Vi så at en av røttene var den reelle roten -2, som vi kjente fra før. De to komplekse røttene er komplekskonjugerte. Det gjelder generelt at komplekse røtter for et polynom med reelle koeffisienter kommer i komplekskonjugerte par.

Siden absoluttverdien til alle røttene er 2, ligger de på en sirkel med radius 2 og sentrum i 0 (origo) i det komplekse tallplan. Dessuten kommer argumentene med samme parvis innbyrdes avstand $2\pi/3$. Det vil si at de ligger jevnt fordelt langs sirkelen og danner hjørnene i en likesidet trekant.



Generelt vil røttene i likningen $z^n = a$, der $a \in \mathbb{C}$, på tilsvarende måte danne hjørnene i en regulær n–kant. Hvis spesielt $a = 1$ hvil $z = 1$ være en av røttene, så punktene ligger på enhetssirkelen og det ene hjørnet kommer på den positvie reelle aksen. Likningen $z^n = 1$ kalles *sirkeldelingslikningen.*

2.5 Komplekse tall på eksponentialform

Eksponentialfunksjonen kan defineres for komplekse tall på en entydig måte, for eksempel via rekketeorien (Matematikk 20). Vi skal ikke gjennomføre dette her, men sette opp en viktig konsekvens av denne definisjonen:

Eulers formel

$$\cos(\theta) + j\,\sin(\theta) = e^{j\theta} \tag{14}$$

Den komplekse eksponentialfunksjonen har mange av de egenskapene vi kjenner for den reelle eksponentialfunksjonen, for eksempel

$$e^x e^y = e^{x+y} \ .$$

Hvis $x = j\theta_1$ og $y = j\theta_2$ betyr dette

$$e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} = e^{j\theta_1 + j\theta_2} = e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

Legg merke til at dette ikke er noe annet enn en produktregelen for komplekse tall (med absoluttverdi 1) på polarform, satt opp på en litt annen måte enn tidligere. Dette i seg selv er nesten nok til å begrunne hvorfor dette er den eneste fornuftige måten å definere $e^{i\theta}$.

Ved hjelp av Eulers formel kan vi skrive

$$|z|\,(\cos(\theta) + j\sin(\theta)) = |z| e^{j\,\theta}$$

Ethver komplekst tall z kan altså skrives som $z = re^{j\,\theta}$ (med $r = |z|$). Dette kalles *eksponentialform.* Siden parametrene er absoluttverdien $r = |z|$ og argumentet θ er dette i grunnen bare en annen måte å skrive opp et komplekst tall gitt på trigonometrisk- eller polarform.

For eksempel er $-2 + 2j = \text{polar}\left(2\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$, fra et tidligere eksempel. På eksponentialform skrives dette

$$-2 + 2j = 2\sqrt{2} e^{j\,3\pi/4} \ .$$

Ved igjen å bruke at $e^x e^y = e^{x+y}$ gjelder får vi også fram hva e^z må være for et vilkårlig komplekt tall $z = a + bj$:

$$e^{a+bj} = e^a e^{bj} = e^a\,(\cos(b) + j\sin(b))$$

For eksempel er

$$e^{2-5j} = e^2\,(\cos(5) + j\sin(5)) = 7.389(0.2837 + j \cdot 0.9589) = 2.096 + 7.086j \ .$$

Eksempel: I anvendelser i elektronikk og signalbehandling vil man ofte støte på eksponentialformen i en sammenheng der vi setter $\theta = \omega t$ og $|z| = R$. Da tolkes kanskje R og ω som konstanter, og t som en reell variabel (tiden). På den måten blir dette en funksjon fra de reelle tall inn i de komplekse tall:

$$f(t) = Re^{j\omega t}$$

Siden $|z| = R =$ konstant, får alle punkter samme absoluttverdi og ligger derfor på en sirkel med sentrum 0 og radius R i det komplekse tallplan. "Bildet" av dette blir da en "partikkel" som beveger seg rundt sirkelen med vinkelhastighet ω.

Ved å identifisere en vektor $\boldsymbol{r}$ med et punkt i planet, og videre med et komplekst tall, er dette egentlig det samme som den vektorvaluerte funksjonen

$$\boldsymbol{r}(t) = [\,R\cos(\omega t)\,,\ R\sin(\omega t)\,]$$

som ble gjennomgått som et eksempel i forbindelse med vektorvaluerte funksjoner. En fordel med å tenke på det som komplekse tall er at regneregler for eksponentialfunksjonen (for eksempel potensregneregler, derivasjon og integrasjon) som vi kjenner fra den reelle eksponentialfunksajonen stort sett fortsatt gjelder.

Vi kan også tenke på $Re^{j\omega t}$ som en funksjon av ω. Dette skifte av "ståsted" (mellom "tidsrommet" og "frekvensrommet") er et viktig aspekt ved bruken av denne funksjonen i anvendelser.

3 Komplekse tall og Maple

I Maple brukes stor `I` som navn på den imaginære enhet. Dette fordi bokstavene i og j ofte brukes i andre sammenhenger.

Regning med komplekse tall på normalform er da rett fram:

```
> (2+3*I)*(1-5*I) ;
```

$$17 - 7I$$

```
> (2+3*I)/(1-5*I) ;
```

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I$$

Komplekse løsninger på likninger gies på normalform:

```
> solve(x^2+2*x+5=0,x) ;
```

$$-1 + 2\,I\,,\ -1 - 2 * I$$

```
> solve({x+I*y=3.0 , I*x+5*y=1.0-I},{x,y}) ;
```

$$\{x = 2.333333333 - 0.1666666667I\,,\ y = 0.1666666667 - 0.6666666667I\}$$

Kommandoen for polarform er **polar**. Hvis vi setter inn et tall på normalform gjøres det om til polarform:

```
> polar(1+I) ,   polar(-2+I) , polar(-2.+I);
```

$$\mathrm{polar}\left(\sqrt{2}\,,\ \frac{\pi}{4}\right)\,,\ \mathrm{polar}\left(\sqrt{5}\,,\ -\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \pi\right)\,,\ \mathrm{polar}\,(2.236067978, 2.677945045)$$

Hvis kommandoen **polar** gies med to reelle argumenter, oppfattes disse som absoluttverdi (modul) og argument.

For å tvinge fram en omregning til normalform kan vi bruke kommandoene **evalc** (EVALuate to Complex number, jfr. **evalf**).

```
> polar(2,Pi/3) ,   evalc(polar(2,Pi/3));
```

$$\mathrm{polar}\left(2\,,\ \frac{\pi}{3}\right)\,,\ 1 + \sqrt{3}I$$

Hvis vi tar eksponentialfunksjonen til et komplekst tall med desimalverdier regnes den om til normalform av seg selv. Hvis vi derimot har gitt den med eksakte verdier eller symboler må vi bruke **evalc** for å få den på normalform:

```
> exp(2.0+5.0*I) ,   exp(x+I*y),  evalc(exp(x+I*y));
```

$$2.095995802 - 7.085545260I\,,\ e^{x+Iy}\,,\ e^{x}\cos(y) + Ie^{x}\sin(y)$$

Vi kan få realdelen av et komplekst tall ved kommandoen **Re**, og imaginærdelen med **Im**:

```
> Re(3+4*I), Im(3+4*I), Re(polar(11,Pi/7)), Im(polar(11,Pi/7));
```

$$3\,,\ 4\,,\ 11\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\,,\ 11\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Absoluttverdien (modulen) får vi ved kommandoen **abs**, argumentet med kommadoen **argument**:

```
> abs(3+4*I), argument(3+4*I), abs(polar(11,Pi/7)), argument(polar(11,Pi/7));
```

$$5\,,\ \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\ 11\,,\ \frac{1}{7}\pi$$

4 Oppgaver

4.1 Normalform

Oppgave 1.1

Regn sammen til normalform

a) $(2+3j)+(-1+j)-(2-j)$

b) $(2+3j)(3+2j)$

c) $(3+4j)(3-4j)$

d) $j(1+j)$

e) j^4

f) $\dfrac{1}{3+4j}$

g) $\dfrac{3-j}{3+j}$

h) $\dfrac{1+j}{j}$

Oppgave 1.2

a) Finn z (på normalform) fra likningen

$$(3-j)\,z = -1+2j$$

b) Finn z (på normalform) fra likningen

$$\frac{2+5j}{-1-2j}\,z = 4+j$$

c) Finn z_1 og z_2 (på normalform) fra likningssystemet

$$\begin{aligned} z_1 + jz_2 &= 1 \\ z_1 + 3z_2 &= 2j \end{aligned}$$

d) Finn de komplekse tallene x og y, skrevet på normalform, som oppfyller følgende likningsystem

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & j\,y & = & 0 \\ j\,x & + & 3\,y & = & 2-4j \end{array} .$$

Oppgave 2c var eksamensoppgave 5a i MM1, april 2003 (dvs. utsatt prøve)

Oppgave 1.3

Regn sammen til et polynom (med variabel x):

$$(x-(-1+2j))\,(x-(-1-2j))$$

4.2 Polarform

Oppgave 2.1

Gjør om til normalform:

a) $2\,(\cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4))$

b) $\text{polar}\left(\sqrt{2}\,,\,3\pi/4\right)$

c) $\cos(3\pi/2) + j\sin(3\pi/2)$

d) $4e^{j\pi/6}$

Oppgave 2.2

Finn absoluttverdi (modul, $|z|$) og argument (θ) for:

a) $1 + j$	b) $1 - j$	c) $-1 + j$	d) $-1 - j$
e) $1 + \sqrt{3}\,j$	f) $-1 + \sqrt{3}\,j$	g) $4j$	h) -15

Oppgave 2.3

Utfør følgende utregninger *eksakt, og uten kalkulator*:

$$\text{La} \qquad z_1 = 2\,(\cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4)) \quad \text{og } z_2 = 4e^{j\pi/6} \ .$$

a) Regn ut $z_1 \cdot z_2$, og gi svaret på trigonometrisk og eksponentilaform.
b) Finn $z_1 \cdot z_2$ på normalform (du vet fra 2.1a og 2.1d hva z_1 og z_2 er på normalform).
c) Bruk svaret til å finne eksakt verdi av $\sin(5\pi/12)$

Oppgave 2.4

Utfør følgende utregninger *eksakt, og uten kalkulator*:

$$\text{La} \qquad z = -1 + \sqrt{3}j \ .$$

a) Gjør om z til polarform.
b) Regn ut z^{10} med de Moivres formel.
Svaret skal gies på polar- og trigonometrisk form.
c) Regn ut z^{10} på normalform.

5 Fasit

Oppgave 1.1

a) $(2+3j)+(-1+j)-(2-j)=(2+(-1)-2)+(3+1-(-1))j=\underline{\underline{-1+5j}}$

b) $(2+3j)(3+2j)=(2\cdot 3-3\cdot 2)+(2\cdot 2+3\cdot 3)j=\underline{\underline{13j}}$

c) $(3+4j)(3-4j)=(3\cdot 3-3\cdot(-4))+(3\cdot(-4)+4\cdot 3)j=(3^2+4^2)+0j=\underline{\underline{25}}$

d) Enklere enn "formel": $j\cdot 1+j\cdot j=j-1=\underline{\underline{-1+j}}$

e) $j^4=\left(j^2\right)^2=(-1)^2=\underline{\underline{1}}$

f) $\dfrac{1}{3+4j}\cdot\dfrac{3-4j}{3-4j}=\dfrac{3-4j}{3^2+4^2}=\underline{\underline{\dfrac{3}{25}-\dfrac{4}{25}j}}$

g) $\dfrac{3-j}{3-j}\cdot\dfrac{3+j}{3+j}=\dfrac{(3\cdot 3-(-1)\cdot(-1))+(3\cdot(-1)+(-1)\cdot 3)j}{3^2+1^2}=\dfrac{8-6j}{10}=\underline{\underline{\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}j}}$

h) $\dfrac{1+j}{j}\cdot\dfrac{-j}{-j}=\dfrac{-j-j^2}{0^2+1^2}=\dfrac{-j-(-1)}{1}=\underline{\underline{1-j}}$

Oppgave 1.2

a) Dividerer begge sider med $3-j$ og får

$$z=\frac{-1+2j}{3-j}=\frac{(-1+2j)(3+j)}{(3-j)(3+j)}=\frac{(-1\cdot 3-2\cdot 1)+(-1\cdot 1+2\cdot 3)j}{3^2+1^2}=\frac{-5+5j}{10}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j}}$$

b)

$$z=\frac{-1-2j}{2+5j}(4+j)=\frac{(-1-2j)(2-5j)}{(2+5j)(2-5j)}(4+j)=\frac{-12+j}{2^2+5^2}(4+j)=\frac{1}{29}(-49-8j)=\underline{\underline{\frac{-49}{29}-\frac{8}{29}j}}$$

c) Løser ut z_1 fra første likning til $z_1=1-jz_2$. Setter dette inn i andre likning:

$$(1-jz_2)+3z_2=2j\iff(3-j)z_2=-1+2j$$

Dette er samme likning som a–oppgaven, med løsning

$$\underline{\underline{z_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j}}\ .$$

Setter så inn dette for å finne z_1:

$$z_1=1-jz_2=1-j\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\right)=1+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}j^2=\underline{\underline{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}j}}$$

d) Fra den første likningen har vi $x=jy$, som kan settes inn i den andre:

$$j\cdot j\,y+3\,y=2-4j\iff -y+3y=2-4j\iff y=\frac{2-4j}{2}=\underline{\underline{1-2j}}$$

Finner deretter x som

$$x=jy=j(1-2j)=j-2j^2=\underline{\underline{2+j}}$$

Oppgave 1.3

Multipliserer sammen ledd for ledd, og behandler de komplekse tallene i første omgang som enkelt ledd:

$$(x-(-1+2j))\,(x-(-1-2j))=x^2-x(-1-2j)-(-1+2j)x+(-1+2j)(-1-2j)=$$
$$x^2-[(-1-2j)+(-1-2j)]\,x+(-1+2j)(-1-2j)$$

Regner sammen $(-1-2j)+(-1-2j)=-2+0j=-2$ og $(-1+2j)(-1-2j)=1^2+2^2=5$, og setter inn dette til

$$x^2-(-2)x+5=\underline{\underline{x^2+2x+5}}$$

Det som er gjort her er det motsatte av å løse likningen $x^2+2x+5=0$, med røtter $-1\pm 2j$. Disse røttene gir opphav til *faktoriseringen* $x^2+2x+5=(x-(-1+2j))\,(x-(-1-2j))$.

Oppgave 2.1

a) $2(\sqrt{2}/2 + j \cdot \sqrt{2}/2) = \underline{\underline{\sqrt{2} + \sqrt{2}j}}$

b) $\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + j\sin(3\pi/4)) = \sqrt{2}\left(-\sqrt{2}/2 + j \cdot \sqrt{2}/2\right) = \underline{\underline{-1 + j}}$

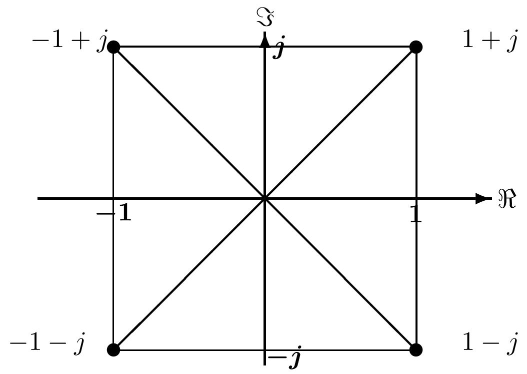
c) $0 + j(-1) = \underline{\underline{-j}}$

d) $4\left(\cos(\pi/6) + j\sin(\pi/6)\right) = 4\left(\sqrt{3}/2 + j \cdot 1/2\right) = \underline{\underline{2\sqrt{3} + 2j}}$

Oppgave 2.2

For å finne absoluttverdi og argument (med eksakte verdier) anbefales å tegne inn tallene i det komplekse tallplan.

a, b, c, d Gjør dette for oppgavene a), b), c) og d) i samme tegning:



Alle fire har modul $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

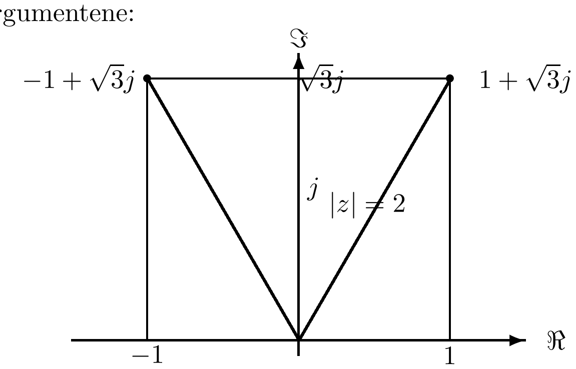
Vi ser at vinkelen linja ut til $1 + j$ danner med den positive reelle aksen er 45°. Det vil si at $\theta = \arg(1 + j) = \underline{\underline{\pi/4}}$.

For de andre er vinklene $\pi/4$ pluss et helt antall rette vinkler, og vi har derfor

$$\arg(-1+j) = \pi/4 + \pi/2 = \underline{\underline{3\pi/4}}, \quad \arg(-1-j) = \pi/4 + \pi = \underline{\underline{5\pi/4}} \text{ og } \arg(1-j) = \pi/4 + 3\pi/2 = \underline{\underline{7\pi/4}}$$

e, f Både $1 + \sqrt{3}\,j$ og $-1 + \sqrt{3}\,j$ har modul $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \underline{\underline{2}}$

Lager figur får å se argumentene:



Vi gjenkjenner (forhåpentligvis) en 30°–60°–90° trekant, da hypotenusen er dobbelt så lang som den korteste kateten. Derfor har vi en 60° vinkel for $1 + \sqrt{3}\,j$. For $-1 + \sqrt{3}\,j$ mangler det 60° på å være 180°, så dette er en 120° vinkel. Omregnet til radianer gir dette

$$\arg(1 + \sqrt{3}\,j) = \underline{\underline{\pi/3}}, \quad \arg(-1 + \sqrt{3}\,j) = \underline{\underline{2\pi/3}}$$

g) Tallet $4j$ finnes 4 enheter oppover på den imaginære aksen (tegn figur selv).
Derfor er $\underline{\underline{|4j| = 4}}$ og $\theta = \underline{\underline{\arg(4j) = \pi/2}}$

h) Tallet -15 finnes 15 enheter til venstre på den reelle aksen (tegn figur selv).
Modulen er $\underline{\underline{|-15| = 15}}$ (Obs: *Ikke* -15 !).

Vinkelen til den *positive* reelle aksen er $180°$ (Obs: *Ikke* $0°$!), så $\underline{\underline{\theta = \arg(-15) = \pi}}$

Oppgave 2.3

a) På eksponentialform er $z_1 = 2e^{j\pi/4}$, og multiplikasjonen er

$$2e^{j\pi/4}4e^{\pi/6} = 2\cdot 4e^{j(\pi/4+\pi/6)} = \underline{\underline{8e^{j5\pi/12} = 8\left(\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) + j\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right)}}$$

b) $z_1 = 2(\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2) = \sqrt{2} + \sqrt{2}j$
$z_2 = 4\,(\cos(\pi/6) + j\sin(\pi/6)) = 4(\sqrt{3}/2 + j\cdot 1/2) = 2\sqrt{3} + 2j$
Dette gir på normalform multiplikasjonen

$$(\sqrt{2} + \sqrt{2}j)(2\sqrt{3} + 2j) = (\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3} - \sqrt{2}\cdot 2) + (\sqrt{2}\cdot 2 + \sqrt{2}\cdot\sqrt{3})j = \underline{\underline{(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) + (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2})j}}$$

c) Ved å sammenlikne imaginærdelene på de to uttrykkene for $z_1 \cdot z_2$ finner vi

$$8\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} \iff \sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{8} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}}$$

Oppgave 2.4

a) Vi fant i oppgave 2.2f at $z = 2(\cos(2\pi/3) + j\sin(2\pi/3))$. På polarform er dette

$$\underline{\underline{\operatorname{polar}\left(2\,,\,\frac{2}{3}\pi\right)}}$$

b)

$$z^{10} = \operatorname{polar}\left(2\,,\,\frac{2}{3}\pi\right)^{10} = \operatorname{polar}\left(2^{10}\,,\,20\pi/3\right)$$

Det er hensiktsmessig å bruke et mindre argument ved å trekke fra et passende antall ganger 2π, og siden $3\cdot 2\pi = 6\pi = 18\pi/3$ tilsvarer $20\pi/3$ argumentet $20\pi/3 - 18\pi/3 = 2\pi/3$:

$$\underline{\underline{z = \operatorname{polar}(1024, 2\pi/3) = 1024\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + j\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)}}$$

c) Regner om z^{10} til normalform:

$$z^{10} = 1024\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\underline{-512 + 512\sqrt{3}j}}$$

18. oktober 2004, Hans Petter Hornæs